Софийски Университет "Св. Климент Охридски"

Факултет по математика и информатика

Катедра "Изследване на операциите"

ДИПЛОМНА РАБОТА

на

Нина Николаева Докева

специалност "Математика", факултетен номер 10359

ВАРИАЦИОННИ ПРИНЦИПИ В БАНАХОВИ ПРОСТРАНСТВА: ПАРАМЕТРИЗАЦИИ И РАЗВИТИЕ

Дипломант: ....
(Нина Николаева Докева)

Научен ръководител: ....
(доц. Пандо Георгиев)

Ръководител катедра: ....
(доц. Никола Янев)

София, 1999 г.

1 Въведение

Дипломната работа е посветена на вариационните принципи в Банахови пространства, които са един често използван инструмент в много задачи от областта на анализ.

В първата част от изложението се прави исторически обзор на развитието на вариационните принципи и се формулират най-често използваните такива, а именно вариационните принципи на Екеланд, и обобщенията дадени по-късно от Борвейн и Прайс, и от Девил, Годфроа и Зизлер.

Във втората част е доказан основният резултат в настоящата работа: нов вариационен принцип за функции, отговарящи на по-слаби изисквания, отколкото в параметричния вариационен принцип на Борвейн и Прайс. В доказателството съществено се използват силни резултати на Майкъл, Сриватца и Джейн и Роджърс.

Използвам случая да благодаря на научния си ръководител доц. Пандо Георгиев за поставените интересни проблеми, както и за всеотдайното му сътрудничество.

2 Обзор на вариационните принципи

Преди 25 години от Екеланд е получен резултатът, формулиран по-долу като Теорема 2.1. Това твърдение, известно като вариационен принцип на Екеланд, се е оказало много полезен инструмент в нелинейния анализ. След това са доказани двете най-известни модификации, получени от Борвейн и Прайс и по-късно от Девил, Годфроа и Зизлер които са положили основата на нова техника, ефективна в много ситуации, която е довела до редица нови резултати и усилване на вече известни във различни области на анализа, екстремалните задачи, теорията на Хамилтон–Якоби и много други области на съвременната математика.

Терминът *вариационни принципи* се отнася за група от резултати показващи, че за полунепрекъсната отдолу и ограничена отдолу функция в пълно метрично пространство, съществува относително малка пертурбация (т.е функция, която се добавя към дадената), така че пертурбираната функция да има абсолютен (строг) минимум според Дефиниция 2.1

Едно малко по-прецизно определение е следното:

Нека $f : X \to (-\infty, +\infty]$ е полунепрекъсната отдолу и ограничена отдолу функция върху банахово пространство $(X, \|\cdot\|)$. Под вариационен принцип ще разбираме твърдение, показващо че съществува функция $\varphi : X \to \mathbb{R}$, принадлежаща на даден клас, такава че φ подпира, тоест се допира до графиката на f отдолу в дадена точка $v \in X$. Когато φ е гладка функция, говорим за гладък вариационен принцип.

Дефиниция 2.1 *Нека X е метрично пространство. Точката $x_0 \in X$*

се нарича точка на строг минимум (съответно точка на строг максимум) на функцията g върху подмножеството P на X, ако $x_n \to x_0$ винаги когато $x_n \subset P$ и $g(x_n) \to \inf g(P)$, съответно $g(x_n) \to \sup g(P)$.

Теорема 2.1 (Вариационен принцип на Екеланд) *Нека (X,d) е пълно метрично пространство и нека $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ е собствена неотрицателна полунепрекъсната отдолу функция. Нека $\varepsilon > 0$ е фиксирано и $x_\varepsilon \in X$ е такава, че*

$$f(x_\varepsilon) \leqq \varepsilon + \inf_X f. \tag{1}$$

Тогава за всяко $k > 0$ съществува $y_\varepsilon \in X$, такова че

$$f(y_\varepsilon) \leqq f(x_\varepsilon) \tag{2}$$

$$d(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \leqq \frac{1}{k} \tag{3}$$

$$f(x) > f(y_\varepsilon) - k\,\varepsilon d(x, y_\varepsilon), \quad \forall x \neq y_\varepsilon. \tag{4}$$

(т.е. пертурбираната функция $f(\,\cdot\,) + k\varepsilon\, d(\,\cdot\,, y_\varepsilon)$ има строг абсолютен минимум в y_ε).

Ще разгледаме геометричния смисъл на условието (4), както и някои частни случаи, получаващи се при конкретни стойности на k.

За целта ще считаме, че пространството X е банахово. Тогава

$$d(x,y) = \|x - y\|.$$

Да означим с C множеството $\Big\{(x,a) \;:\; a + k\varepsilon\|x\| \;<\; 0\Big\}$. Тогава C представлява конус с връх в точката $(0,0)$ и ъгъл при върха ω, където ω е решение на уравнението $\tan\omega = k\varepsilon$.

Тогава

$$C + (\overline{x}, \overline{a}) = \Big\{ (x, a) \, : \, (a - \overline{a}) + k\varepsilon \|x - \overline{x}\| \leqq 0 \Big\}.$$

Сега вече се вижда, че геометричният смисъл на условието (4) е, че конусът $C + (y_\varepsilon, f(y_\varepsilon))$ лежи изцяло под графиката на функцията f в $X \times \mathbb{R}$, като се допира до нея само във върха си.

Колкото по-малко е числото $k\varepsilon$, толкова по-“плосък” става конусът C и следователно толкова по-близка е границата на множеството $C + (y_\varepsilon, f(y_\varepsilon))$ до хоризонтална равнина, минаваща през $(y_\varepsilon, f(y_\varepsilon))$.

Теоремата показва, че за всяко $\varepsilon > 0$, може да се намери точка x_ε, удовлетворяваща (1), и следователно, точка y_ε, удовлетворяваща условията (2), (3) и (4).

Изборът на коефициента k ни дава възможност да намерим баланс между условията (3) и (4), в зависимост от целите, които преследваме.

Ако коефициентът k е малък, то конусът C отново е “плосък” и точката y_ε е близка до точка на глобален минимум, или по-точно стойността на функцията в тази точка ще е близо до инфимума. От друга страна дясната част на неравенството 3 ще е голяма, така че информацията за положението на точката y_ε ще е незначителна. Ако стойностите на k са големи, се наблюдава обратната зависимост.

Два важни частни случая са $k = 1$ и $k = \varepsilon^{-\frac{1}{2}}$. При $k = 1$ сме приели, че условието (3) не е важно за нас.

Теорема 2.2 *Нека X е пълно метрично пространство и нека $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ е собствена полунепрекъсната отдолу и ограничена отдолу* *функция. Тогава за всяко $\varepsilon > 0$ съществува y_ε, такава че*

$$f(y_\varepsilon) \leqq \varepsilon + \inf f \tag{5}$$

$$f(x) > f(y_\varepsilon) - \varepsilon d(x, y_\varepsilon),\ \forall x \neq y_\varepsilon. \tag{6}$$

Когато $k = \varepsilon^{-\frac{1}{2}}$ получаваме следната

Теорема 2.3 *Нека X е пълно метрично пространство и нека $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ е полунепрекъсната отдолу и ограничена отдолу функция. За произволно $\varepsilon > 0$, нека $x_\varepsilon \in X$ е такова, че*

$$f(x_\varepsilon) \leqq \varepsilon + \inf f. \tag{7}$$

Тогава съществува $y_\varepsilon \in X$, такова че

$$f(y_\varepsilon) \leqq f(x_\varepsilon) \tag{8}$$

$$d(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \leqq \sqrt{\varepsilon} \tag{9}$$

$$f(x) > f(y_\varepsilon) - \sqrt{\varepsilon} d(x, y_\varepsilon), \quad \forall x \neq y_\varepsilon. \tag{10}$$

Като приложения на вариационния принцип на Екеланд ще дадем следните три теореми:

Теорема 2.4 (на Банах за свиващото изображение) *Нека X е банахово, $U : X \to X$ е липшицова с константа на Липшиц, по-малка от 1. Тогава съществува $\overline{x} \in X$, такова че $\overline{x} = f(\overline{x})$.*

Тази теорема се доказва като положим във теорема 2.2

$$f(x) = \|x - U(x)\|, \quad \varepsilon < 1 - L,$$

където L е константата на Липшиц, положим $x = F(\overline{x})$ и използваме условието на Липшиц $\|U(x) - U(y)\| \leqq L\|x - y\|$.

Теорема 2.5 *Нека X е банахово пространство и нека f е диференцируема по Гато ограничена отдолу функция. Тогава съществува редица от точки y_ε, за които*

$$\|f'_G(y_\varepsilon)\| \leqq k\varepsilon,$$

т.е $\|f'_G(y_\varepsilon)\|$ клони към нула при $\varepsilon \to 0$.

Тази теорема е обобщение на добре известното необходимо условие за локален минимум, $f'(y_\varepsilon) = 0$, което се получава при $k\varepsilon = 0$. Доказателсвото може да бъде намерено в [13].

Като последно приложение ще приведем правилото за множители на Лагранж в банахово пространство:

Теорема 2.6 *Дадена е задачата (P): Да се минимизира функцията f, зададена върху X при следните ограничения върху x:*

1) $g_i(x) \leqq 0$ $(i = 1, \ldots, n)$

2) $h_j(x) = 0$ $(j = 1, \ldots, m)$ *където g_i и h_j са реалнозначни функции върху X и*

3) *ограничение от общ тип $x \in C$, където C е зададено множество в X.*

Нека x е решение на задачата (P). Тогава за всяко достатъчно голямо k съществуват $\lambda \geqq 0$, $r \geqq 0$ и s, които не са едновременно нули, такива че

$$\langle r,\, g(x)\rangle = 0$$

$$0 \in \delta_x L(x, \lambda, r, s, k)$$

където $g = [g_1, \ldots, g_n]$, $h = [h_1, \ldots, h_m]$ са изображения от X в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ съответно и

$$L(x, \lambda, r, s, k) = \lambda f(x) + \langle r, g(x)\rangle + \langle s, h(x)\rangle + k|(\lambda, r, s)|d_C(x).$$

Едно съществено ограничение на вариационния принцип на Екеланд, довело до появата на вариационния принцип на Борвейн и Прайс е, че дори първоначалната функция да е диференцируема, пертурбираната функция не е. Разумен гладък вариационен принцип е търсен много дълго. През 1978 г. Стегал [10] стига до гладък вариационен принцип, който обаче е имал твърде силни ограничения върху пространството и не е бил приложим за някои важни класове банахови пространства.

Едва през 1987 г. Борвейн и Прайс публикуват гладък вариационен принцип без никакви допълнителни ограничения върху пространството, освен разбира се съществуването на гладка норма, за да можем да имаме гладка пертурбация.

Теорема 2.7 (Вариационен принцип на Борвейн-Прайс) *Нека X е банахово пространство, $g : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ е полунепрекъсната отдолу* *и нека са дадени константите:* $\varepsilon > 0, \lambda > 0$ *и* $p \geqq 1$. *Да предположим, че* x_0 *удовлетворява условието*

$$g(x_0) < \varepsilon + \inf_X g.$$

Тогава съществуват $v \in X$ *и* $v_n \in X,\ v_n \to v,\ \mu_n \in [0,1]$, *със свойството* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \mu_n = 1$, *такива че*

$$g(v) + \frac{\varepsilon}{\lambda^p}\Delta(v) \leqq g(x) + \frac{\varepsilon}{\lambda^p}\Delta(x),\ \forall x \in X, \tag{11}$$

където

$$\Delta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n \|x - v_n\|^p,$$

$$\|v - x_0\| < \lambda. \tag{12}$$

Във [2] са показани някои от приложенията на тази теорема, отнасящи се до диференцируемост и субдиференцируемост, както и някои следствия, важащи за изпъкнали функции.

Ако към пертурбацията добавим и $\|x - x_0\|^p$, ще получим строг минимум за пертурбираната функция, откъдето се вижда, че вариационният пренцип на Борвейн-Прайс наистина е обобщение на вариационния принцип на Екеланд.

През 1991 г. е получен още по-общ гладък вариационен принцип на Девил, Годфроа и Зизлер, който работи не само в пространства с гладка норма, но и в такива, в които е достатъчно да има гладка шапковидна функция. Пример за това, че съществуват банахови пространства с гладка шапковидна фунция, които обаче не притежават никаква гладка норма е показан от R. Haydon в [12].

Дефиниция 2.2 *Нека X е банахово пространство. Функцията $b : X \to R$ ще наричаме шапковидна функция, ако не е навсякъде нула и има ограничена база.*

Теорема 2.8 *Нека X е банахово пространство, което допуска липшицова, навсякъде диференцируема по Фреше (Гато) шапковидна функция и нека $\{(f_n\}$ са полунепрекъснати отдолу и ограничени отдолу функции, дефинирани върху X. Тогава за всяко $\varepsilon > 0$, съществува навсякъде диференцируема по Фреше (Гато) липшицова функция g, такава че*

1) $\|g\|_\infty = sup\{|g(x)|;\ x \in X\} \leqq \varepsilon$

2) $\|g'\|_\infty = sup\{|g(x)|;\ x \in X\} \leqq \varepsilon$

3) *за всяко n функцията $f_n + g$ достига минимума си върху X.*

Съществува (виж [11]) и следният вариант на принципа на Девил, Годфроа и Зизлер:

Теорема 2.9 *Нека X е банахово пространство, което допуска липшицова, навсякъде диференцируема по Фреше(Гато) шапковидна функция и нека $f : X \to \mathbb{R}\bigcup\{+\infty\}$ е полунепрекъсната отдолу и ограничена отдолу функция, която не е навсякъде $\{-\infty\}$.*

Тогава за всяко $\varepsilon > 0$, съществува навсякъде диференцируема по Фреше(Гато) липшицова функция g, такава че

1) $\|g\|_\infty = \sup\{|g(x)|;\ x \in X\} \leqq \varepsilon$

2) $\|g'\|_\infty = \sup\{|g(x)|;\ x \in X\} \leqq \varepsilon$

3) *$f + g$ достига строг минимум в някоя точка $x_0 \in X$.*

Имайки в предвид тази дефиниция, за да може да се каже че този вариационен принцип е пълно обобщение на вариационния принцип на Борвейн и Прайс, е необходимо само да се покаже решение на въпроса за локализацията на точката на минимум. Това е направено от Пандо Георгиев и Надя Златева в [8] със следния резултат:

Теорема 2.10 *Нека b е шапковидна функция, такава че*

$$\text{supp } b \subset B(0,1),\ b(0) = 1 \text{ и } 0 \leqq b(x) \leqq 1,\ \forall x \in E.$$

Нека $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ е ограничена отдолу функция, такава че

$$D(f) = \{x \in E\ :\ f(x) < +\infty\} \neq 0.$$

Нека са дадени $\varepsilon > 0,\ \lambda > 0$ и $y_0 \in X$, удовлетворяващо условието

$$f(y_0) < \inf_E f + \varepsilon.$$

Тогава за всяко $\delta > 0$ съществува точка $x_0 \in E$, такава че:

1) $\quad f(x_0) - \varepsilon b\left(\dfrac{x_0 - y_0}{\lambda}\right) < \inf_E \left\{ f(x) - \varepsilon b\left(\dfrac{x - y_0}{\lambda)}\right)\right\} + \delta$

2) $\quad \dfrac{x_0 - y_0}{\lambda} \in \text{supp } b$

3) $\quad \|x_0 - y_0\| < \lambda.$

Публикувани са множество приложения на вариационния принцип на Девил, Годфроа и Зизлер, свързани с диференцируемост на изпъкнали функции, минимизация на негладки функции, уравнения на Хамилтон-Якоби и др. (виж [11]).

Ще изложим и едно подобрение на горния вариационен принцип, направено от Девил и Ревалски:

Дефиниция 2.3 *Нека X е метрично пространство и $A \subset X$. Подмножеството A се нарича поресто в X ако съществува константа $c > 0$ такава, че за всяко $x \in A$ и всяко достатъчно малко $r > 0$ съществува $y \in X$ такова, че*

$$B(y, cr) \subset B(x, r) \cap {}^c\!A$$

Множеството A се нарича σ-поресто ако е изброимо обединение на порести множества. Подмножество A на X се нарича от първа категория на Бер, ако $A \subset \cup A_n$, където A_n са затворени и $\overset{o}{A_n} = \emptyset$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Всяко σ-поресто множество е от първа категория на Бер. Във $\mathbb{R}^n$, всяко σ-поресто множество има мярка 0. Можем да си представяме, че σ-порестите множества са "малки" и в смисъл на мярка и в смисъл на категория. Повече информация по този въпрос може да бъде намерена в [15].

Теорема 2.11 (Девил–Ревалски) *Нека X е банахово пространство със C^1 липшицова шапковидна функция b, дефинирана върху X и $f : X \to \mathbb{R}$ е полунепрекъсната отдолу и ограничена отдолу функция. Тогава, ако означим*

$Y = \{g : X \to \mathbb{R} : g$ е C^1 – гладка, ограничена и липшицова $\}$ то множеството $G = \{g \in Y : f + g$ достига строг минимум $\}$ има допълнение, което е σ-поресто в Y.

Още по-общ резултат в тази насока може да бъде намерен във [14].

Разработена е също така и теория за частично гладки вариационни принципи, която има това предимство, че може да бъде прилагана за по-широк кръг от пространства. Тогава получаваме частично гладка пертурбация, но това в много случаи се оказва достатъчно. Ще формулираме частично-гладък вариант на вариационния принцип на Борвейн и Прайс, доказан от Борвейн и Тцу. За целта първо ще дадем няколко дефиниции.

Дефиниция 2.4 *Нека X е банахово пространство. Борнология β във X се нарича семейство от затворени, ограничени и централно-симетрични подмножества на X със обединение X, което е затворено относно умножение със скалар и е ориентирано нагоре (т.е. обединението на два елемента на β се съдържа в някой друг негов елемент). Най важните борнологии са тези, образувани съответно от всички (симетрични) ограничени множества (борнология на Фреше), слабо-компактни множества (слаба борнология на Адамар), компактни множества (борнология на Адамар) и крайни множества (борнология на Гато).*

Дефиниция 2.5 *Нека Y е банахово подпространство на X. Функцията f, дефинирана върху X ще наричаме $Y\beta$–диференцируема върху X със $Y\beta$ производна $\nabla f(x) \in X^*$, ако $f(x)$ е крайна и*

$$\frac{f(x+tu) - f(x) - t\langle \nabla f(x), u\rangle}{t} \to 0$$

когато $t \to 0$, равномерно по $u \in V$ за всяко $V \in \beta$, където β е борнология върху Y.

Дефиниция 2.6 *Ще казваме че функцията f е $Y\beta$ гладка в x ако*

$$\nabla f|_Y : X \to Y^*_\beta$$

е непрекъсната в околност на x.

Да забележим, че $\nabla f|_Y(x)$ е еднозначно определена, за разлика от $\nabla f(x)$.

Теорема 2.12 (Борвейн–Тцу) *Нека X е банахово пространство и Y е банахово подпространство на X.]Нека X има $Y\beta$-гладка норма. Нека $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ е полунепрекъсната отдолу и нека още са дадени константите $\varepsilon > 0$ и $\lambda > 0$ и точката и удовлетворява условието*

$$f(u) < \inf_X f + \varepsilon.$$

Тогава съществува локално-липшицова $Y\beta$–диференцируема функция g, дефинирана върху X и $v \in X$, така че

(i) функцията $x \to f(x) + g(x)$ достига глобален минимум в $x = v$

(ii) $\|u - v\| < \lambda$,

(iii) $f(v) < \inf_X f + \varepsilon$, *и*

(iv) $\|\nabla g|_Y(v)\| < \dfrac{2\varepsilon}{\lambda}$.

3 Параметрични вариационни принципи. Основен резултат.

В тази част ще представим параметричните вариационни принципи на Екеланд и на Борвейн-Прайс, доказани в [6] и [7], а също така ще формулираме и докажем нов по-общ резултат.

Параметричният вариационен принцип на Екеланд показва, че точката на минимум на пертурбираната функция може да се избере по такъв начин, че да зависи непрекъснато от параметъра.

Теорема 3.1 (Параметричен вариационен принцип на Екеланд) *Нека E е банахово пространство, X е паракомпактно топологично пространство, Y е затворено изпъкнало подмножество на E и нека $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ е функция със следните свойства:*

1) *функциите $\{f(\,\cdot\,, y) : y \in Y\}$ са равностепенно непрекъснати*
2) *$f(x, \cdot\,)$ е изпъкнала и полунепрекъсната отдолу за всяко x от X*
3) $\inf\limits_{y \in Y} f(x,y) > -\infty, \quad \forall x \in X.$

Нека $y' : X \to Y$ са непрекъснати функции и $\varepsilon > 0, \lambda > 0$ са дадени. Тогава за всяко $\delta > 0$ съществува непрекъснато изображение

$$y_\delta : X \to Y,$$

такова че

(а) $f(x, y_\delta(x)) = \min\limits_{y \in Y}\left\{ f(x,y) + \dfrac{\varepsilon}{\lambda}\|y - y_\delta(x)\| \right\}, \quad \forall x \in X$

(б) $\|y'(x) - y_\delta(x)\| < \lambda$, *винаги когато* $f(x, y'(x)) < \inf\limits_{z \in X} f(x,z) + \varepsilon - \delta$

(в) $y_\delta(x)$ *е точка на строг минимум във* (а) *за всяко* $x \in X$.

В [7] са дадени много приложения на този принцип, като например някои минимаксни теореми, както и обобщение на неравенството на Ки–Фан.

Обобщение на горния резултат е параметричният вариационен принцип на Борвейн–Прайс, където точката на минимум на пертурбираната функция с гладка изпъкнала пертурбация, при подходящи условия зависи непрекъснато от параметъра.

Да дефинираме

$$F_\varepsilon(x) = \{y \in Y : f(x,y) \leqq \inf f(x,Y) + \varepsilon\}.$$

и

$$H_{\delta,\alpha}(x) = \bigcup_{z \in B(x;\delta)} F_\alpha(z).$$

Теорема 3.2 (Параметричен вариационен принцип на Борвейн–Прайс) *Нека X е паракомпактно топологично пространство, Y е изпъкнало затворено и непразно подмножество на банахово пространство и функцията $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ за всяко $x \in X$ удовлетворява условията:*

(i) функцията $f(x,\,\cdot\,)$ е строго изпъкнала и полунепрекъсната отдолу

(ii) функцията $f(\,\cdot\,,y)$ е полунепрекъсната отгоре за всяко $y \in Y$;

(iii) функциите $\left\{ f(\,\cdot\,,y) : y \in H_{\delta_x,\alpha_x}(x) \right\}$ са равностепенно непрекъснати по x за някои $\delta_x > 0$ и $\alpha_x > 0$.

Нека $\varepsilon > 0$, $\lambda > 0$, $y_0 : X \to Y$ е дадена непрекъсната фунция, такава че

$$f(x, y_0(x)) \leq \inf f(x,Y) + \varepsilon, \quad \forall x \in X.$$

Нека $p \geq 1$ са дадени и да допуснем че $p > 1$, тогава множеството $H_{\delta'_x,\alpha'_x}(x)$ е ограничено за някои $\delta'_x > 0, \alpha'_x > 0$ за всяко $x \in X$.

Тогава за всяко $\alpha > 0$ съществува непрекъснато изображение $v: X \to Y$, последователност от непрекъснати изображения $y_n : X \to Y$ и от положителни числа $\{\nu_n\}_{n\geq 0}$, така че $y_n(x)$ клони поточково във $x \in X$ към $v(x)$ и

$$\|v(x) - y_0(x)\| < \lambda, \quad \forall x \in X \tag{13}$$

$$f(x, v(x)) + \Delta(x, v(x)) \leq f(x, y) + \Delta(x, y), \quad \forall x \in X,\ \forall y \in Y, \tag{14}$$

където

$$\Delta(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n \|y - y_n(x)\|^p, \tag{15}$$

$$\mu_n = \frac{\varepsilon + \alpha}{\lambda^p} \nu_n, \quad n \geq 0 \tag{16}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \nu_n = 1. \tag{17}$$

Като приложение на параметричния вариационен принцип на Борвейн-Прайс в [6] са дадени теорема за непрекъснати селекции на субдиференциали от изпъкнали функции, зависещи от параметър, както и теорема за съществуването на равновесие по Неш след пертурбация, където едно от множествата не е компактно.

Параметричният вариационенн принцип на Борвейн-Прайс може да се изкаже по-просто по следния начин:

Теорема 3.3 (Параметричен вариационен принцип на Борвейн–Прайс)

Нека X е паракомпактно топологично просранство, Y е банахово пространство, и функцията $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ удовлетворява условията:

(i) $\quad f(x,\cdot)$ *е изпъкнала и полунепрекъсната отдолу*

(ii) $\quad \{f(\cdot,y),\ y \in Y\}$ *са равностепенно непрекъснати.*

Нека $\varepsilon > 0,\ \lambda > 0,\ p \geqq 1,\ y_0 : X \to Y$ е непрекъснато изображение, удовлетворяващо условието

$$f(x, y_0(x)) < \inf f(x, Y) + \varepsilon,\ \forall x \in X.$$

Тогава за всяко $\alpha > 0$, съществуват непрекъснато изображение $v : X \to Y$ и непрекъснати изображения $y_n : X \to Y,\ \forall n \geqq 1$, така че $y_n(x)$ клони равномерно по x към $v(x)$, и още съществуват положителни числа $\nu_n > 0,\ \sum_{n=0}^{\infty} \nu_n = 1$ така че

1) $\|v(x) - y_0(x)\| < \lambda,\ \forall x \in X$

2) $f(x, v(x)) + \Delta(x, v(x)) \leqq f(x,y) + \Delta(x,y),\ \forall x \in X,\ \forall y \in Y$, *където*

3) $\Delta(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n \|y - y_n(x)\|^p$

4) $\mu_n = \dfrac{\varepsilon + \alpha}{\lambda^p} \nu_n,\ \alpha > 0.$

В доказателството се използва следната

Теорема 3.4 (Теорема на Майкъл за селекциите) *Нека X е паракомпактно топологично пространство, Y е банахово пространство, многозначното изображение $F : X \to 2^Y$ е полунепрекъснато отдолу с изпъкнали затворени непразни образи.*

Тогава съществува непрекъсната селекция на F, т.е. съществува непрекъсната функция $f : X \to Y$, такава че $f(x) \in F(x),\ \forall x \in X$.

В настоящата работа ще покажем нов вариационен принцип, в който функцията $f(x, \cdot)$ няма нужда да е изпъкнала, а $f(\cdot, y)$ е достатътчно да бъде от първи клас на Бер, вместо да е непрекъсната. В резултат на тези промени в условията минимумът за пертурбираната функция, който намираме от теоремата е пак непрекъсната функция по x, но е дефинирана вече в гъсто $G_\delta-$подмножество на X.

Дефиниция 3.1 *Нека X и Y са метрични пространства. Функцията $f : X \to Y$ ще наричаме от функция от първи клас на Бер, ако f е поточкова граница на редица от непрекъснати функции от X в Y.*

Известно е, че при $Y = \mathbb{R}$ всяка функция от първи клас на Бер е непрекъсната в гъсто $G_\delta-$подмножество на X.

Това е следствие например от следната теорема на Джон Джейн и К. Роджърс, доказана в [5].

Теорема 3.5 *Нека X е метрично пространство и Y е банахово пространство, притежаващо свойството на непрекъсната точка. Нека f е полунепрекъснато отгоре изображение от X във Y в слабата му топология. Нека F приема само слабокомпактни непразни стойности. Тогава в силната топология на Y, многозначното изображение F има измерима по Борел селекция f от първи клас на Бер. Освен това множеството от точки на X, където f не е непрекъсната в силната топология, е F_σ-множество от първа категория в X.*

Ще използваме следните добре известни факти:

- Всяко подмножество X на метрично пространство е метрично пространство с индуцираната топология.

- Нека Y е гъсто G_δ подмножество на метрично пространство X, Z е гъсто G_δ подмножество на Y, като Y е разгледано с индуцираната топология. Тогава Z е гъсто G_δ подмножество в X.

- От теорема на Бер следва, че сечение на изброимо много гъсти G_δ подмножества е гъсто G_δ подмножество.

- Всяка изпъкнала и полунепрекъсната отдолу функция е слабо полунепрекъсната отдолу.

Ще ни бъде необходима също следната

Теорема 3.6 (за селекции на Сриватца) *Нека X е метрично пространство, Y е банахово пространство и изображението $F : X \to 2^Y$ е слабо полунепрекъснато отгоре. Тогава съществува редица от силно непрекъснати функции, клоняща поточково към селекция на F.*

Лема 3.1 *Нека X е метрично пространство, Y – ограничено подмножество на рефлексивно банахово пространство и функцията $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ удовлетворява условията:*

(i) $f(x, \cdot)$ е слабо полунепрекъсната отдолу;

(ii) $f(\cdot, y)$ е непрекъсната равномерно по y.

Тогава за всяко $\varepsilon > 0$ многозначното изображение

$$F_\varepsilon(x) := \left\{ y \in Y : f(x, y) \leqq \inf f(x, Y) + \varepsilon \right\}$$

е слабо полунепрекъснато отгоре.

Доказателство:

Първа стъпка:

Ще докажем че от условията $x_n \to x_0,\ y_n \in F_\varepsilon(x_n)$ и $y_n \xrightarrow{w} y_0$ следва че $y_0 \in F_\varepsilon(x_0)$.

Ще използваме, че $\inf f(x, Y)$ е полунепрекъсната отгоре. Наистина, тъй като $f(\,\cdot\,, y)$ е полунепрекъсната отгоре, равномерно по y, то съществува околност U на x_0 такава, че

$$\inf f(x, Y) \leqq f(x, y) < f(x_0, y) + \varepsilon, \quad \forall x \in U, \quad \forall y \in Y,$$

а понеже $f(x_0, y)$ са ограничени отдолу, тъй като Y е ограничено, а $f(x_0, \cdot)$ е полунепрекъсната отдолу, следва че

$$\inf f(x, Y) \leqq \inf f(x_0, Y) + \varepsilon, \quad \forall x \in U.$$

Сега нека $x_n \to x_0,\ y_n \in F_\varepsilon(x_n)$ и $y_n \xrightarrow{w} y_0$.

От полунепрекъснатостта отдолу на f по двете променливи в $(\|\ \|, \tau)$, условието $y_m \in F_\varepsilon(x_m)$ и полунепрекъснатостта отгоре на $\inf f(x, Y)$, имаме

$$f(x_0, y_0) \leqq \underline{\lim}_m f(x_m, y_m) \leqq \overline{\lim}_m \inf f(x_m, Y) + \varepsilon \leqq \inf f(x_0, Y) + \varepsilon$$

Следователно $f(x_0, y_0) \leqq f(x_0, y) + \varepsilon$ за всяко $y \in Y$, т.е. $y_0 \in F_\varepsilon(x_0)$.

Втора стъпка:

Ще докажем, че $F_\varepsilon(x)$ е слабо полунепрекъснато отгоре, т.е. множеството

$$S := \left\{ x \in X : F_\varepsilon(x) \bigcap C \neq \emptyset \right\}$$

е затворено за всяко слабо затворено $C \in Y$.

Нека C е произволно слабо затворено подмножество на Y и нека $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in X, \quad x_n \to x_0, \quad F_\varepsilon(x_n) \bigcap C \neq \emptyset,\ \forall n \geqq 1$.

Сега ще покажем, че $x_0 \in S$:

Нека $y_n \in F_\varepsilon(x_n) \bigcap C$. Щом Y е ограничено, то $F_\varepsilon(x)$ също е ограничено и тъй като Y е рефлексивно, следва че $F_\varepsilon(X)$ е относително слабо компактно.

Следователно съществува подредица на y_n, клоняща слабо към някакво y_0, което пък принадлежи на C, тъй като C е слабо затворено.

Сега от първа стъпка y_0 е и от $F_\varepsilon(x_0)$, т.е. $x_0 \in S$. Получихме, че S е затворено и значи $F_\varepsilon(x)$ е слабо полунепрекъснато отгоре.

Лема 3.2 *Нека X е метрично пространство и нека Y – ограничено подмножество на рефлексивно банахово пространство, а функцията $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ удовлетворява следните условия:*

(i) $\quad f_n(x, \cdot)$ е слабо полунепрекъсната отдолу

(ii) $\quad f(\cdot, y)$ е непрекъсната равномерно по y. Нека са дадени $\varepsilon > 0$ и изображение $y_0 : X \to Y$, от първи клас на Бер и такова, че

$$f(x, y_0(x)) \leqq \inf f(x, Y) + \varepsilon, \quad \forall x \in X$$

Тогава за всяко $p \geqq 1,\ \delta > 0$ и $\mu > 0$, съществува изображение $v : X \to Y$ от първи клас на Бер и такова, че:

$$f(x,v(x))+\mu\|v(x)-y_0(x)\|^p \leqq f(x,y)+\mu\|y-y_0(x)\|^p+\delta, \quad \forall x \in X, \quad \forall y \in Y,$$

$$\|v(x)-y_0(x)\| < \left(\frac{\varepsilon+\delta}{\mu}\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall x \in X.$$

Доказателство:

Нека разгледаме функцията

$$f'(x,\cdot) = f(x,\cdot)+\mu\|\cdot - y_0(x)\|^p.$$

Тя удовлетворява условията (i) и (ii). Наистина $\|y-y_0(x)\|$ е слабо полунепрекъсната отдолу, понеже е изпъкнала и полунепрекъсната отдолу и следователно $f'(x,\,\cdot\,)$ е слабо полунепрекъсната отдолу.

От Лема 1 следва, че $F'_\varepsilon(x)$ е слабо полунепрекъснато отдолу. Тогава от теоремата на Сриватца за всяко $\delta > 0$ съществува функция $v : X \to Y$ от първи клас на Бер, такава че:

$$f'(x,v(x)) \leqq \inf f'(x,Y)+\delta, \quad \forall x \in X,$$

т.е.

$$f(x,v(x))+\mu\|v(x)-y_0(x)\|^p \leqq f(x,y)+\mu\|y-y_0\|^p+\delta, \quad \forall x \in X, \quad \forall y \in Y.$$

При $y = y_0(x)$ следва че

$$\mu\|v(x)-y_0(x)\|^p \leqq f(x,y_0(x))-f(x,v(x))+\delta \leqq \varepsilon+\delta, \quad \forall x \in X$$

и следователно

$$\|v(x)-y_0(x)\| < \left(\frac{\varepsilon+\delta}{\mu}\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall x \in X.$$

Сега вече сме готови да изложим основният резултат:

Теорема 3.7 *Нека X е метрично пространство, Y е ограничено подмножество на рефлексивно банахово пространство и нека функцията $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ удовлетворява условията:*

(i) $f(x, \cdot)$ е слабо полунепрекъсната отдолу

(ii) $f(\cdot, y)$ е непрекъсната равномерно по y в гъсто G_δ–подмножество $\widetilde{X}$ на X.

Нека са дадени числа $\varepsilon > 0$, $\lambda > 0$ и изображение $y_0 : X \to Y$, непрекъснато в гъсто G_δ-подмножество $X_0 \subset \widetilde{X} \subset X$, и такова, че

$$f(x, y_0(x)) \leqq \inf f(x, Y) + \varepsilon, \quad \forall x \in X_0$$

Тогава за всяко $\alpha > 0$ съществуват гъсто G_δ-подмножество X° на X и непрекъснато изображение $v : X^\circ \to Y$, редица от непрекъснати изображения $y_n : X^\circ \to Y$ и редица от положителни числа $\{\nu_n\}_{n \geqq 0}$, такива че $y_n(x)$ клони равномерно по $x \in X^\circ$ към $v(x)$,

$$(iii)\ \|v(x) - y_0(x)\| < \lambda, \quad \forall x \in X^\circ,$$

$$(iv)\ f(x, v(x)) + \Delta(x, v(x)) \leqq f(x, y) + \Delta(x, y), \quad \forall x \in X^\circ,\ \forall y \in Y,$$

където

$$\Delta(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n \|y - y_n(x)\|^p,\ \mu_n = \frac{\varepsilon + \alpha}{\lambda^p} \nu_n,\ n \geqq 0.$$

Доказателство: Нека $\varepsilon_0 = \varepsilon$ и $\mu_0 \in \left(\frac{\varepsilon}{\lambda^p}, \frac{\varepsilon + \lambda}{\lambda^p}\right)$. Тогава $\nu_0 = \dfrac{\mu_0 \lambda^p}{\varepsilon + \alpha} < 1$. Следователно можем да изберем положителни ν_n, така че $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \nu_n = 1$.

За всяко $n \geqq 1$ взимаме $\varepsilon_n > 0$ толкова малки, че за $\lambda_n := \left(\frac{\varepsilon_n + \varepsilon_{n+1}}{\mu_n}\right)^{\frac{1}{p}}$, $n \geqq 0$, където $\mu_n = \frac{\varepsilon + \alpha}{\lambda^p}\nu_n$ да бъде изпълнено $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n < \lambda$.

По Лема 3.2 можем да изберем индуктивно редица от функции $f_n : X_{n-1} \times Y \to \mathbb{R}$, удовлетворяващи условията (i) и (ii), и редица от изображения $y_n : X_{n-1} \to Y$, непрекъснати в X_n, такива че за $\forall n \geqq 0$ да имаме:

$$f_{n+1}(x, y) = f_n(x, y) + \mu_n \|y - y_n(x)\|^p, \quad f_0 := f \tag{18}$$

$$f_n(x, y_n(x)) \leqq \inf f_n(x, Y) + \varepsilon_n, \quad \forall x \in X_{n-1} \tag{19}$$

$$\|y_n(x) - y_{n+1}(x)\| < \lambda_n, \quad \forall x \in X_n, \tag{20}$$

където $X_0 \supset X_1 \supset ... \supset X_n \supset ...$ е намаляваща редица от гъсти G_δ-подмножества на X.

Наистина, нека $f_1(x, y) = f(x, y) + \mu_n \|y - y_0(x)\|$

По условие

$$f(x, y_0(x)) \leqq \inf f(x, Y) + \varepsilon, \quad \forall x \in X_0$$

Сега от Лема 3.2, приложена за метричното пространство X_0, съществува $y_1(x)$, удовлетворяващо (19) за $n = 1$ и (20) за $n = 0$, като $y_1(x)$ е непрекъсната в гъсто $G_\delta-$подмножество X_1 на X_0, което е гъсто $G_\delta-$подмножество и на X. Тази конструкция продължава по аналогичен начин.

От (20) $y_n(x)$ е фундаментална редица. Тъй като Y е банахово, получаваме че съществува функция $v(x)$, такава че $y_n(x)$ клони равномерно към $v(x)$, за всяко $x \in X^\circ := \bigcap X_n$. Но y_n са поточкови граници на непрекъснати функции и следователно v също е поточкова граница на непрекъснати функции.

Наистина, нека $y_{1,n} \to y_1, \ldots, y_{m,n} \to y_m, \ldots$ поточково. Тогава имаме, че $y_{n,n}$ клони към v поточково, защото при достатъчно големи n е изпълнено

$$|v(x) - y_{n,n}(x)| \leqq |v(x) - y_n(x)| + |y_n(x) - y_{n,n}(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \ \forall x \in X^\circ.$$

Имаме равномерна сходимост $y_n(x) \rightrightarrows v(x)$, тъй като λ_n не зависи от x и по-точно:

$$\|y_n(x) - v(x)\| \leqq \|y_n(x) - y_m(x)\| + \|y_m(x) - v(x)\|$$

Второто събираемо е по-малко от δ при m достатъчно голямо, а първото е по-малко от δ при m и n достатъчно големи, независещи от x, $m > n$.

Следователно $\|y_n(x) - v(x)\| \leqq \delta$

при n достатъчно голямо, независещо от x.

Избираме ε_n толкова малки, че $\lambda_n < q^n < 1$ и тогава

$$\|y_n(x) - y_m(x)\| \leqq \|y_n - y_{n+1}\| + \cdots + \|y_{m-1} - y_m\| <$$
$$< q^n(1 + \cdots + q^{m-n}) = q^n \frac{1 - q^{m-n+1}}{1 - q} \longrightarrow 0$$

при m, $n \to \infty$ независимо от x.

Ще докажем, че за всяко $x \in X^\circ$, $v(x)$ е точка на минимум за функцията

$$\widetilde{f}(x, \cdot) = f(x, \cdot) + \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n \| \cdot - y_n(x)\|^p$$

Нека са дадени $\gamma > 0$ и $x \in X$. Т.к. $\widetilde{f}(x,\cdot)$ е полунепрекъсната отдолу, следва че

$$\widetilde{f}(x,v(x)) < \widetilde{f}(x,y) + \frac{\gamma}{3}$$

за всяко y от околност с радиус δ на $v(x)$. Нека n е толкова голямо, че:

$$\varepsilon_n < \frac{\gamma}{3}$$
$$|y_n(x) - v(x)\| < \delta$$
$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \mu_k \|y_n(x) - y_k(x)\|^p < \frac{\gamma}{3}.$$

Тогава

$$\begin{aligned}
&\widetilde{f}(x,v(x)) < \widetilde{f}(x,y_n(x)) + \frac{\gamma}{3} = \\
&= f_n(x,y_n(x)) + \sum_{k=n}^{\infty} \mu_k \|y_n(x) - y_k(x)\|^p + \frac{\gamma}{3} \leqq \\
&\leqq f_n(x,y) + \varepsilon_n + \frac{\gamma}{3} + \frac{\gamma}{3} < \widetilde{f}(x,y) + \gamma.
\end{aligned}$$

При $\gamma \to 0$ получаваме (iv). Освен това

$$\begin{aligned}
&\|v(x) - y_0(x)\| \leqq \|v(x) - y_n(x)\| + \|y_n(x) - y_{n-1}(x)\| + \cdots + \|y_1(x) - y_0(x)\| < \\
&< \varepsilon + \lambda_{n-1} + \cdots + \lambda_0 < \varepsilon + \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i.
\end{aligned}$$

При $\varepsilon \to 0$ получаваме $\|v(x) - y_0(x)\| \leqq \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i < \lambda$, т.е. (iii).

Като следствие на горната теорема ще получим и вариант на параметричния вариационен принцип на Екеланд:

Теорема 3.8 *Нека X е метрично пространство, Y е ограничено подмножество на рефлексивно банахово пространство и функцията $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ удовлетворява условията:*

(i) $\quad f(x,\cdot\,)$ *е слабо полунепрекъсната отдолу*

(ii) $\quad f(\,\cdot\,,y)$ *е непрекъсната равномерно по* y *в гъсто* G_δ*-подмножество* $\widetilde{X}$ *на* X.

Нека са дадени $\varepsilon > 0$ *и изображение* $y_0 : X \to Y$*, непрекъснато в гъсто* G_δ*-подмножество* $X_0 \subset \widetilde{X}$ *на* X*, и такова че*

$$f(x,y_0(x)) \leqq \inf f(x,Y) + \varepsilon, \quad \forall x \in X_0$$

Тогава за всяко $\alpha > 0$ *и всяко* $\lambda > 0$*, съществува гъсто* G_δ*-подмножество* X° *на* X *и непрекъснато изображение* $v : X^\circ \to Y$*, за което са изпълнени условията:*

1) $\quad \|v(x) - y_o(x)\| < \lambda$

2) $\quad f(x,v(x)) \leqq f(x,y) + \dfrac{\varepsilon+\alpha}{\lambda}\|y - v(x)\|,\ \forall x \in X^\circ,\ \forall y \in Y.$

Доказателство: Имаме, че

$$f(x,v(x)) + \sum_{n=0}^{\infty}\mu_n\|v(x) - y_n(x)\|^p \leqq f(x,y) + \sum_{n=0}^{\infty}\mu_n\|y - y_n(x)\|^p,$$
$$\forall x \in X^\circ,\ \forall y \in Y,\ \forall p \geqq 1.$$

При $p = 1$ получаваме

$$f(x,v(x)) + \sum_{n=0}^{\infty}\mu_n\|v(x) - y_n(x)\| \leqq f(x,y) + \sum_{n=0}^{\infty}\mu_n\|y - y_n(x)\|,\ \forall x \in X^\circ,\ \forall y \in Y.$$

Следователно

$$f(x,v(x)) \leqq f(x,y) + \sum_{n=o}^{\infty}\mu_n(\|y - y_n\| - \|v(x) - y_n\| \leqq$$

$$\leqq f(x,v(x)) + \sum_{n=o}^{\infty}\mu_n(\|y - v(x)\| \leqq f(x,y) + \frac{\varepsilon+\alpha}{\lambda}\|y - v(x)\|,\ \forall x \in X^\circ,\ \forall y \in Y.$$

С това теоремата е доказана.

Литература

[1] Ж.-П. Обен и И. Экланд: Прикладной нелинейный анализ, Москва, “Мир”, 1988.

[2] J. Borwein and D. Preiss: A smooth variational principle with applications to subdifferentiability and to differentiability of convex functions, *Trans.Amer.Math.Soc.* **303** (1987), 517–527.

[3] R. Deville, G. Godefroy and V. Zizler: A smoth variational principle with applications to Hamilton-Jacobi equations in infinite dimentions, *J.Functional Anal.*, **111** (1993), 197–272.

[4] A.Joffe and V. Tikhomirov: Some remarks on Variational Principles, *Mathematical notes*, **61** (1997).

[5] J. Jayne and C. Rogers: Borel selectors for upper semicontinuous set valued maps, *Acta Math.* **155** (1985), 41–79.

[6] P. Georgiev: A parametric Borwein-Preiss variational principle and applications, preprint No. 99/25, Universite de Pau.

[7] P. Georgiev: Extreme continous selections, parametric Ekeland's variational principle and applications, preprint No. 376, 1999, Centro Vito Volterra, University of Roma 'Tor Vergata'.

[8] P. Georgiev and N. Zlateva: Generic Gateaux differentiability via smooth perturbations.

[9] M. Fabian, P. Hajek and J. Vanderwerff: On smooth variational principles in Banach Spaces, *J.Mat.Anal.and Appl*, **197** (1996), 153–172.

[10] C. Stegall: Optimization of functions on certain subsets of Banach spaces, *Studia Math.*, **46** (1978), 171–176.

[11] R. Deville: Smooth variational principles and non smooth analysis in Banach spaces, *in: Nonlinear analysis, differential equations and control, NATO Sci. Ser. Math. Phys. Sci.*, Montreal QC 1998, Kluver Acad. Publ., Dordrecht, 1999, 395–406.

[12] R. Haydon: A counterexample in several questions about scattered compact spaces, *Bull. London Math. Soc.*, **22** (1990), 261–268.

[13] J.-P. Aubin and I. Ekeland: Applied Nonlinear Analysis, A Wiley-Interscience Publ., John Wiley and Sons, 1984.

[14] R. Deville and J. Revalski: Porosity of ill-posed problems, to appear in *Proc. Amer. Math. Soc.*

[15] L. Zajcek: Porosity and σ-porosity, *Real Anal. Exchange*, **13** (1987-88), 314–350.